

Регуляризованный след оператора Лапласа-Бельтрами возмущенного оператором умножения на функцию на многообразиях со специальным возмущением метрики сферы

Т.В.Зыкова

16 апреля 2014 г.

Рассмотрим M - двумерное компактное замкнутое многообразие без края такое, что

- 1) $M \in SC_{2\pi}$ [1], т. е. все геодезические M замкнуты и имеют одинаковую длину 2π ;
- 2) Метрика M является возмущением метрики стандартной сферы S^2 . Т. е., пусть в R^3 есть координаты (u_1, u_2, u_3) и известна их связь с декартовыми координатами (x, y, z) , позволяющая выписать в этих координатах евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в R^3 , а ограничением этой получившейся метрики на сферу единичного радиуса (как правило заменой одной из переменных, например, u_3 на единицу), получить общий вид стандартной метрики двумерной сферы в координатах (u_1, u_2) :

$$ds^2 = A(u_1, u_2)du_1^2 + 2B(u_1, u_2)du_1du_2 + C(u_1, u_2)du_2^2, \quad (1)$$

где $A(u_1, u_2)$, $B(u_1, u_2)$, $C(u_1, u_2)$ таковы, что ds^2 является римановой и $A(u_1, u_2)C(u_1, u_2) - B^2(u_1, u_2) > 0$. Тогда под метрикой M , будем понимать метрики вида

$$ds_p^2 = A_p(u_1, u_2)du_1^2 + 2B_p(u_1, u_2)du_1du_2 + C_p(u_1, u_2)du_2^2, \quad (2)$$

для которых верно:

- а) $A_p(u_1, u_2)$, $B_p(u_1, u_2)$, $C_p(u_1, u_2)$ таковы, что ds_p^2 является римановой, $A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2) - B_p^2(u_1, u_2) > 0$ и геодезические получившейся метрики замкнуты и имеют одинаковую длину 2π .
- б) $A_p(u_1, u_2) = A(u_1, u_2) + P_A(u_1, u_2)$, $B_p(u_1, u_2) = B(u_1, u_2) + P_B(u_1, u_2)$, $C_p(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) + P_C(u_1, u_2)$, то есть возмущения таковы, что при обнуле-

нии функций $P_A(u_1, u_2)$, $P_B(u_1, u_2)$, $P_C(u_1, u_2)$, мы получим стандартную метрику сферы ds^2 .

Приведем известные примеры таких метрик:

- (I) Метрика на сфере ds^2 заданная в полярных координатах, а ds_p являющаяся метрикой вращения Цолля (см., например, [1]);
- (II) Метрика на сфере ds^2 заданная в сферо-конических координатах, а ds_p заданная двухпараметрическим семейством C^∞ -гладких метрик (попарно неизометричных) (см. для подробностей [2]).

Мы будем исследовать оператор Лапласа-Бельтрами возмущенный комплекснозначной функцией q на многообразиях типа M . Следует отметить, что в такой общей постановке задача нахождения регуляризованного следа для оператора Лапласа-Бельтрами прежде не рассматривалась. В 1991 году В.А. Садовничим и В.В. Дубровским в [3] для S^2 и нечетного потенциала q впервые была получена формула следа со скобками:

$$\mu_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) \right] = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2 dS.$$

Позже В. Е. Подольский [4], применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле таубероу теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок (но этот случай является единственным исключением). Позже В.Е. Подольским [5] были получены аналогичные формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах ранга 1. А.Н. Бобров предпринимал попытку [6] найти след оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на поверхности вращения Цолля, но допустил неточность (не была учтена необходимость построения оператора аналогичного $-\tilde{\Delta}_M$ введенного в этой работе, см. ниже) и приведенную им формулу нельзя считать окончательно верной, но результат для случая простой сферы S^2 и произвольной комплекснозначной функции $q \in C^\infty$ был получен. В.А. Садовничий и З.Ю. Фазуллин для оператора возмущенного произвольной комплекснозначной функцией лучшей гладкости: в 2005 году для $q \in C^2(S^2)$ [7], а в 2011 году для $q \in W_1^2(S^2)$ [8] получили формулу регуляризо-

ванного следа:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0 \right] = 2c_1,$$

где $c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} q(\omega) d\omega$, $c_1 = \frac{1}{32\pi^3} \int_{S^2} \int_{S^2} \frac{q(\omega)q(\omega_0)}{\sqrt{1 - (\vec{\omega}, \vec{\omega}_0)^2}} d\omega d\omega_0 - \frac{1}{16\pi} \int_{S^2} q^2(\omega) d\omega$, $(\vec{\omega}, \vec{\omega}_0)$ - скалярное произведение векторов $\vec{\omega} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ и $\vec{\omega}_0 = (\cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0)$.

В этой работе будет приведена формула следа, обобщающая посчитанные ранее частные примеры.

Кратко обратимся к схеме построения регуляризованного оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях типа M .

Для нормализованного оператора Лапласа-Бельтрами на стандартной сфере S^2 хорошо известен (см., например, [10]) его спектр, который состоит из точек

$$\varkappa_{ki} = k(k+1), \quad (3)$$

где $k = 0, 1, \dots$; $i = 1, \dots, N_k$, где кратность $N_k = 2k+1$. Обозначим через $-\tilde{\Delta}_M$ псевдодифференциальный оператор (далее ПДО) второго порядка на M , спектр которого совпадает с \varkappa_{ki} .

Пусть $-\Delta_M$ - оператор Лапласа-Бельтрами на многообразии M . А. Вейнштейн в [11] указал на то, что оператор $-\Delta_M$ представим в виде $-\Delta_M = -\tilde{\Delta}_M + B$, где B - ПДО нулевого порядка. Такое представление позволило полагать, что основные результаты этой работы, посвященной исследованию асимптотик кластеров разностей собственных значений возмущенного и невозмущенного операторов, применимы к собственным числам оператора $-\Delta_M$. Но для получения окончательного вида асимптотик кластеров, необходимо знать символ оператора B или его усреднение. А. Вейнштейн выдвинул гипотезу, что символом усреднения символа такого возмущения является усреднение гаусовой кривизны многообразия вдоль геодезической. Позже, в 1997 году С. Зельдич [12], вычислил явный вид символа усреднения, указав, что помимо предполагаемого А. Вейнштейном, есть

еще один член не всегда равный нулю:

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\gamma} \left(K_M - 1 + \left[\frac{1}{3} (K_M)_v u^3 \int_0^r (K_M)_v J^3 dt - (K_M)_v u^2 J \int_0^r (K_M)_v u J^2 dt \right] \right) dr, \quad (4)$$

здесь K_M - гауссова кривизна многообразия, γ — произвольная геодезическая, v -единичный вектор нормали к геодезической γ , $J(r, \omega)$ - объемная плотность в геодезических полярных координатах, то есть $dvol(\gamma) = J(r, \omega) dr d\omega$, u и v - фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической γ с условиями $\begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Нам удобней рассматривать эту функцию не на пространстве геодезических, а на кокасательном расслоении единичных сфер, поэтому перепишем ее в следующем виде:

$$\sigma^{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(\sigma) dt, \quad \text{где}$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \left(K_M - 1 + \left[\frac{1}{3} (K_M)_v u^3 \int_0^r (K_M)_v J^3 ds - (K_M)_v u^2 J \int_0^r (K_M)_v u J^2 ds \right] \right), \quad (5)$$

и Ξ - гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*M \setminus \{0\}$.

Обозначим собственные числа $-\Delta_M$ через λ_{ki} , где $k = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, 2k + 1$. Здесь двойная нумерация согласована с нумерацией \varkappa_{ki} . Отметим, что для собственных чисел оператора $-\Delta_M$ имеет место следующая оценка [13]:

$$|\lambda_{ki} - \varkappa_{ki}| = O(1). \quad (6)$$

Далее рассмотрим $-\Delta_M + q$ — оператор Лапласа-Бельтрами возмущенный комплекснозначной функцией на M и обозначим собственные числа этого оператора через μ_{ki} , где двойная нумерация согласована с нумерацией λ_{ki} (а значит, и с нумерацией \varkappa_{ki}), и также $k = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, 2k + 1$, и также верна

аналогичная оценка:

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1). \quad (7)$$

Наша задача получить формулу регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_M + q$ и \varkappa_{ki} (то есть, нам интересно узнать, как «отличаются» собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом взятого на M от собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами рассматриваемого на стандартной сфере). Решение поставленной задачи будет проведено в три этапа:

1. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_M = -\tilde{\Delta}_M + B$ и $-\tilde{\Delta}_M$ (то есть для λ_{ki} и \varkappa_{ki});
2. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_M + q$ и $-\Delta_M$ (то есть для μ_{ki} и λ_{ki});
3. Сведение и вычисление общей формулы регуляризованного следа для μ_{ki} и \varkappa_{ki} , с помощью результатов пунктов 1. и 2.

Опишем эти этапы более подробно.

1. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_M = -\tilde{\Delta}_M + B$ и $-\tilde{\Delta}_M$.

Положим $\nu_{ki} = \lambda_{ki} - k(k+1)$, здесь $i = 0, \dots, 2k$. Имеет место асимптотическое разложение при $k \rightarrow \infty$ (см., например, [14]):

$$\sum_{i=0}^{2k} \nu_{ki} = a_0(2k+1) + a_1 + a_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}), \quad (8)$$

а значит и

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} = (2k+1)k(k+1) + a_0(2k+1) + a_1 + a_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}). \quad (9)$$

Из последней формулы видно, что для вычисления первого следа нам необходимо знать коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 .

Введем в рассмотрение ряды $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)e^{-k(k+1)t}$ и $L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$. Поскольку $\lambda_k \sim k$, то $L(t)$ равномерно сходится при $0 < t_0 \leq t < +\infty \forall t_0$.

Исследуя ряд

$$L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\lambda_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-(k(k+1)+\nu_{ki})t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\nu_{ki}t},$$

проведя все необходимые оценки, можно показать, что при $t \rightarrow 0$

$$L(t) = F(t) - a_0 t F(t) - a_1 t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} - a_2 t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1)^{-1} + O(t), \quad (10)$$

а окончательно исследовав асимптотики при $t \rightarrow 0$ для рядов $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1)^{-1}$ (см., например, [5]), получить что

$$L(t) = F(t) - a_0 t F(t) + a_1 \frac{1}{2} \sqrt{\pi} t^{1/2} - a_2 t \ln t + O(t). \quad (11)$$

Для оператора являющегося самосопряженным расширением оператора $-\Delta_M$ известна асимптотика его тета-функции, совпадающая с $L(t)$ (см., например, [15]):

$$L(t) = t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} l_j t^j, \quad (12)$$

и аналогично для $F(t)$

$$F(t) = t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j t^j. \quad (13)$$

Из этих формул и (11) следует, что $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ и осталось вычислить только a_0 . Подставим (13) в (11) и перепишем:

$$L(t) = (f_0 \frac{1}{t} + f_1) - a_0 f_0 + O(t), \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (14)$$

Сравнивая получившуюся формулу с (12), получаем, что $l_0 = f_0$ и $l_1 = f_1 - a_0 f_0$, а следовательно, $a_0 = \frac{f_1 - l_1}{f_0}$, где l_1, f_1, f_0 коэффициенты соответствующих тета-функций операторов и их можно вычислить через значения аналитического продолжения дзета-функций данных операторов, а значит

ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1) \right)$$

сходится абсолютно.

Для оценки правой части ряда удобно рассмотреть разность рядов $L(t) - (1 - a_0 t)F(t)$ при $t \rightarrow 0$. Выполнив все необходимые выкладки и оценки можно получить, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1) \right) e^{-k(k+1)t} = \\ & = \frac{1}{t} ((1 - a_0 t)F(t) - L(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \right) t + o(1). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части. Как уже отмечалось выше, можем воспользоваться результатами работы [11] для нахождения асимптотики кластеров, так как символ усреднения оператора B нам известен и определен формулой (5). Значит при $k \rightarrow \infty$ верно

$$\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \sim \frac{2k+1}{4\pi^2} \int_{S^*M} (\sigma^{av})^2 dv + O(1),$$

где S^*M расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве; dv - канонический элемент объема S^*M .

Далее, подставив асимптотики (12) и (13) в (15) при $t \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - a_0(2k+1) \right) = \\ & = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} ((1 - a_0 t)F(t) - L(t)) + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (\sigma^{av})^2 dv = \\ & = f_2 - l_2 - a_0 f_1 + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (\sigma^{av})^2 dv, \end{aligned} \quad (16)$$

где σ^{av} определен в (5), $a_0 = \frac{f_1 - l_1}{f_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (12) и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$ (13).

2. Построение формулы регуляризованного следа для собственных чисел оператора $-\Delta_M + q$ и $-\Delta_M$.

Все рассуждения приведенные выше можно повторить и для этого случая – для построения регуляризованного следа для μ_{ki} и λ_{ki} . Аналогично положим $\nu'_{ki} = \mu_{ki} - \lambda_{ki}$, здесь $k = 1, 2, \dots$, $i = 0, \dots, 2k$ и запишем асимптотическое разложение при $k \rightarrow \infty$:

$$\sum_{i=0}^{2k} \nu'_{ki} = b_0(2k+1) + b_1 + b_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение ряд $M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t}$ и так как для оператора являющегося самосопряженным расширением оператора $-\Delta_M + q$ известна асимптотика его тета-функции, совпадающая с $M(t)$, то запишем:

$$M(t) = t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} m_j t^j. \quad (18)$$

Проводя аналогичное исследование, только для собственных чисел μ_{ki} и λ_{ki} , с использованием асимптотик $M(t)$ и $L(t)$ можно показать, что в (17) b_1 и b_2 равны нулю, а $b_0 = \frac{l_1 - m_1}{l_0}$ и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) - b_0(2k+1) \right)$$

сходится абсолютно.

Проводя аналогичное исследование для нахождения правой части этого ряда,

получим формулу, аналогичную (15):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) - b_0(2k+1) \right) e^{-\lambda_{ki}t} = \\ & = \frac{1}{t} ((1 - b_0t)L(t) - M(t)) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_{ki}t} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki})^2 \right) t + o(1). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части. Аналогично, из [11] следует, что для внутреннего ряда при $k \rightarrow \infty$ верно

$$\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki})^2 \sim \frac{2k+1}{4\pi^2} \int_{S^*M} (q^{av})^2 dv + O(1),$$

где S^*M расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве; dv - канонический элемент объема S^*M ; символ усреднения

$$q^{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(q) dt, \quad (20)$$

где Ξ - гамильтоново векторное поле на $T^*M \setminus \{0\}$.

Тогда, окончательно переходя в (19) к пределу при $t \rightarrow +0$ и пользуясь формулами (18) и (12), получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\mu_{ki} - \lambda_{ki}) - b_0(2k+1) \right) = \\ & = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} ((1 - b_0t)L(t) - M(t)) + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (q^{av})^2 dv = \\ & = l_2 - m_2 - b_0 l_1 + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (q^{av})^2 dv, \end{aligned} \quad (21)$$

где q^{av} определен в (20), $b_0 = \frac{l_1 - m_1}{l_0}$, l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (12) и m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$ (18).

3. Сведение и вычисление общей формулы регуляризованного следа для $-\Delta_M + q$.

Сложим левые и правые части формул (16) и (21) и получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} - k(k+1)(2k+1) - (a_0 + b_0)(2k+1) \right) = \\ & = f_2 - a_0 f_1 + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (\sigma^{av})^2 dv - m_2 - b_0 l_1 + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (q^{av})^2 dv, \end{aligned} \quad (22)$$

где σ^{av} определен в (5), q^{av} определен в (20), $a_0 = \frac{f_1 - l_1}{f_0}$, $b_0 = \frac{l_1 - m_1}{l_0}$, m_i - коэффициенты разложения тета-функции $M(t)$ (18), l_i - коэффициенты разложения тета-функции $L(t)$ (12) и f_i - коэффициенты разложения тета-функции $F(t)$ (13).

Для получения окончательного ответа нам необходимо предъявить явный вид коэффициентов асимптотик $M(t)$, $L(t)$ и $F(t)$, участвующих в ответе. Сначала отметим, что асимптотику $F(t)$ можно вычислить напрямую исследуя ряд $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)e^{-k(k+1)t}$, например, с помощью [5] и получить, что при $t \rightarrow +0$

$$F(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}t + O(t^2),$$

а значит $f_0 = 1$, $f_1 = \frac{1}{3}$ и $f_2 = \frac{1}{15}$. Выше также было отмечено, что $f_0 = l_0 = m_0$, а значит $f_0 = l_0 = m_0 = 1$.

Для исследования $M(t)$ и $L(t)$ будем пользоваться иными соображениями. Хорошо известно, что θ -функция и ζ -функция связаны преобразованием Меллина и искомые коэффициенты разложения тета-функций выражаются через аналитические значения дзета-функций, а именно

$$m_1 = \zeta_{-\Delta_M+q}(0), \quad m_2 = -\zeta_{-\Delta_M+q}(1),$$

где $\zeta_{-\Delta_M+q}(0)$ и $\zeta_{-\Delta_M+q}(1)$ - значения аналитического продолжения дзета-функ-

ции оператора $-\Delta_M + q$ в точках 0 и 1. Аналогично для $L(t)$:

$$l_1 = \zeta_{-\Delta_M}(0), \quad l_2 = -\zeta_{-\Delta_M}(1),$$

где $\zeta_{-\Delta_M}(0)$ и $\zeta_{-\Delta_M}(1)$ - значения аналитического продолжения дзета-функции оператора $-\Delta_M$ в точках 0 и 1.

В теории ПДО известна стандартная процедура (см., например, [16]) построения параметрикса для классического эллиптического ПДО на замкнутом многообразии. В ее основе — нахождение символа параметрикса, как асимптотической суммы неких однородных функций, которые, в свою очередь определяются через однородные компоненты символа самого оператора с применением формулы композиции. В случае, когда оператор дифференциальный, с помощью такого метода, удастся получить компоненты разложения символа резольвенты по рекуррентным формулам и с помощью их, получить искомые значения аналитического продолжения ζ -функции. В нашем случае, когда метрика многообразия задана в абстрактном виде, вычислительная сложность решения задачи сильно возросла и решение во многом было получено с помощью символьного программирования в пакете Wolfram Mathematica 9 [17].

$$\begin{aligned} \zeta_{-\Delta_M+q}(0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_M \left(\frac{1}{3} K_M - q(u_1, u_2) \right) \sqrt{\det g} du_1 du_2, \\ \zeta_{-\Delta_M+q}(1) &= -\frac{1}{60\pi} \iint_M (\Delta_M K_M + K_M^2) \sqrt{\det g} du_1 du_2 - \\ &\quad - \frac{1}{24\pi} \iint_M (-\Delta_M q(u_1, u_2) + 3q^2(u_1, u_2) - 2q(u_1, u_2)\gamma(ML)) \sqrt{\det g} du_1 du_2, \end{aligned}$$

где $\sqrt{\det g} = \sqrt{A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2) - B_p^2(u_1, u_2)}$ - корень из определителя матрицы метрического тензора и

$$\begin{aligned} K_M &= \frac{1}{4(B_p(u_1, u_2)^2 - A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2))^2} \times \\ &\quad (C_p(u_1, u_2)A_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)^2 - 2B_p(u_1, u_2)A_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)B_{p_{u_2}}'(u_1, u_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_p(u_1, u_2)A_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)C_{p_{u_2}}'(u_1, u_2) + 2B_p(u_1, u_2)^2A_{p_{u_2}u_2}''(u_1, u_2) - \\
& 2A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2)A_{p_{u_2}u_2}''(u_1, u_2) - 2C_p(u_1, u_2)B_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)A_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) + \\
& B_p(u_1, u_2)C_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)A_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) + 4B_p(u_1, u_2)B_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)B_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) - \\
& 2A_p(u_1, u_2)C_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)B_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) - B_p(u_1, u_2)A_{p_{u_2}}'(u_1, u_2)C_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) + \\
& C_p(u_1, u_2)A_{p_{u_1}}'(u_1, u_2)C_{p_{u_1}}'(u_1, u_2) - 2B_p(u_1, u_2)B_{p_{u_1}}'(u_1, u_2)C_{u_1}'(u_1, u_2) + \\
& A_p(u_1, u_2)C_{p_{u_1}}'(u_1, u_2)^2 - 4B_p(u_1, u_2)^2B_{p_{u_1}u_2}''(u_1, u_2) + \\
& 4AA_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2)B_{p_{u_1}u_2}''(u_1, u_2) + 2B_p(u_1, u_2)^2C_{p_{u_1}u_1}''(u_1, u_2) - \\
& 2A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2)C_{p_{u_1}u_1}''(u_1, u_2) \Big) - \text{гауссова кривизна } M.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{4\pi} \iint_M \left(\frac{1}{3} K_M - q(u_1, u_2) \right) \sqrt{\det g} du_1 du_2, \\
m_2 &= \frac{1}{60\pi} \iint_M (\Delta_M K_M + K_M^2) \sqrt{\det g} du_1 du_2 + \\
&+ \frac{1}{24\pi} \iint_M (-\Delta_M q(u_1, u_2) + 3q^2(u_1, u_2) - 2q(u_1, u_2)\gamma(ML)) \sqrt{\det g} du_1 du_2,
\end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что вычисление этих значений опиралось в большей степени на вид метрики многообразия и на вид оператора на ней. Нетрудно увидеть, что $\zeta_{-\Delta_M+q}(\ast)$ при $q = 0$, есть $\zeta_{-\Delta_M}(\ast)$. Тогда получаем, что

$$l_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_M \left(\frac{1}{3} K_M \right) \sqrt{\det g} du_1 du_2, \quad l_2 = \frac{1}{60\pi} \iint_M (\Delta_M K_M + K_M^2) \sqrt{\det g} du_1 du_2. \tag{24}$$

Формулы содержащие интеграл от гауссовой кривизны по многообразию (для m_1 и l_1) можно упростить используя формулу Гаусса-Бонне, то есть воспользоваться тем, что $\iint_M K_M \sqrt{\det g} dv_2 dv_3 = 2\pi\chi(M)$, где $\chi(M)$ - характеристика Эйлера,

которая в данном случае равна 2. И тогда окончательно можем сформулировать главный результат этой работы.

ТЕОРЕМА: Пусть $M \in SC_{2\pi}$ — многообразие, метрика которого является возмущением метрики стандартной сферы и задана формулой (2), q - бесконечно-дифференцируемая комплекснозначная функция на M , тогда для собственных чисел оператора $-\Delta_M + q$ верно равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\mu_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \int_M q dS \right) = \\ & = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (q^{av})^2 dv + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*M} (\sigma^{av})^2 dv + \frac{1}{15} - \\ & - \frac{1}{60\pi} \int_M (\Delta_M K_M + K_M^2) dS - \frac{1}{24\pi} \int_M (-\Delta_M q + 3q^2 - 2q(K_M - 1)) dS, \end{aligned}$$

где K_M - гауссова кривизна M , S^*M - расслоение единичных косфер над M , dv - каноническая форма объема на S^*M , $q^{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(q) dt$, где Ξ - гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*M \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на M , $\sigma^{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(\sigma) dt$, где $\sigma = \frac{1}{4}(K_M - 1 + \left[\frac{1}{3}(K_M)_v u^3 \int_0^r (K_M)_v J^3 ds - (K_M)_v u^2 J \int_0^r (K_M)_v u J^2 ds \right])$, где v - единичный вектор нормали к геодезической γ , $J(r, \omega)$ - объемная плотность в геодезических полярных координатах, то есть $dvol(\gamma) = J(r, \omega) dr d\omega$, u и v - фундаментальные решения уравнения Якоби вдоль геодезической γ с условиями $\begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Список литературы

- [1] Бессе А. *Многообразия с замкнутыми геодезическими*. - М. Мир. 1980.
- [2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация (Том 2)*. Ижевск. Издательский дом «Удмуртский университет». 1999.
- [3] Садовничий В. А., Дубровский В.В. *Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере*. - ДАН СССР, том 319, №1, с.61-62. 1991.
- [4] Подольский В.Е. *Формула регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2* . - Матем. заметки, том 56, №1, с.71-77. 1994.
- [5] Podol'skii V.E. *On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one*. - Russian J. Math. Phys. 4, №1, 123–130. 1996.
- [6] Бобров А.Н. *След оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на поверхности Цолля* - Доклады АН, 368 (2), 154–156. 1999.
- [7] Садовничий В. А., Фазуллин З. Ю. *Асимптотика собственных чисел и формула следа возмущения оператора Лапласа на сфере S^2* - Матем. заметки, 77:3, с.434–448. 2005.
- [8] Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И. *Свойства резольвенты оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере и формула следов* - Доклады академии наук, 2011, Т.441.№2. С. 174-176.
- [9] Садовничий В. А., Подольский В. Е. *Следы операторов* - УМН, 61:5(371), 89–156. 2006.
- [10] Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными (в 4-х томах)*. - М. Мир. 1986, 1986, 1987, 1988.

- [11] Weinstein A. *Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential*. Duke Math J., v.44, p.883-892, 1977.
- [12] Zelditch S. *Fine Structure of Zoll Spectra* - Journal of functional analysis, v. 143, p.415-460. 1997.
- [13] Weinstein A. *The resolvent of an elliptic boundary problem. Fourier integral operators, quantization and the spectra of Riemannian manifolds*. – Colloque International de Geometrie Symplectique et Physique Mathematique CNRS Aix (Juin 1974). 1976.
- [14] Guillemin V., Uribe A. *Spectral properties of a certain class of complex potentials*. - Trans, of the Amer. Math. Soc, v. 279, №, 759 – 771. 1983.
- [15] Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы*. - М. Мир. 1985.
- [16] Шубин М. А. *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*. - М. Наука. 1978.
- [17] <http://www.wolfram.com/mathematica/>

Т.В. Зыкова
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,
 zytanya@yandex.ru